数Ⅲをもっと厳密にやってみようよ

§1.関数の極限

まずは、極限の定義ですね。

高校の教科書には次のように書いてあります。

関数 $f(x)$において，x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，$f(x)$がある一定の値 α に限りなく近づく場合，

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \qquad \text{または、} x \to a \text{ のとき } f(x) \to \alpha$$

と書き，この値 α を $x \to a$ のときの $f(x)$の**極限値**という．

また，このとき，次のようにもいい表す．

$x \to a$ のとき　$f(x)$は α に**収束する**

しかし、この「限りなく～」という表現は論理的ではなく限りなく抽象的な表現なので、これを厳密な定義というわけにはいきません。この抽象的な表現を具体的なものに変えるには、「限りなく x が～」という言葉を使わずに「～と比べ x が…」のように比較の対象を加えてやると、途端に具体的かつ論理的な表現になります。

そこで、現代の数学では次のように定義しています。

関数$f(x)$において，任意の正の実数 ε に対して，

$$0<|x-a|<\delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-\alpha|<\varepsilon$$

となる正の実数 δ が存在することを，

$x \to a$ のとき $f(x)$は α に収束するという。

これは ε-δ 論法といわれてる収束の厳密な定義です。

※この定義が理解しにくいがために極限を苦手とする人が多いと聞きますが、上の定義は次のように数式を使わずに説明すると理解されることが多いです。

任意に正の実数 ε を選びます。で、x と a の差を δ より小さくすれば$f(x)$と α の差は最初に選んだ ε よりも小さくなる。そんな実数 δ が存在するとき、$x \to a$ のとき $f(x) \to \alpha$ という。

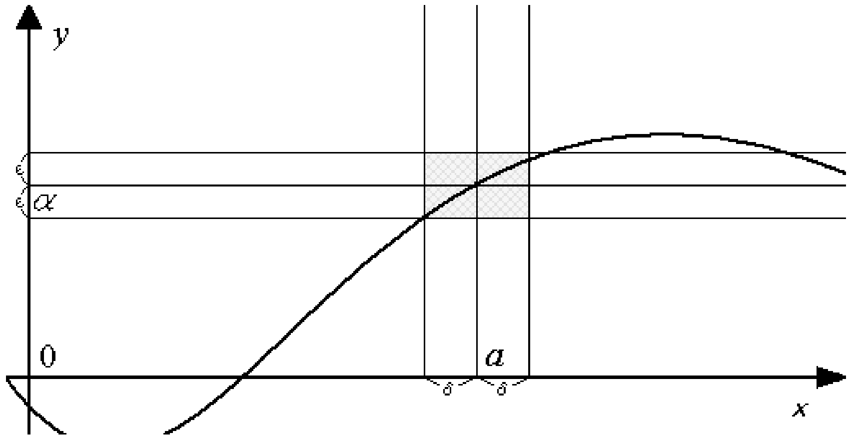
これでも理解できないという人も多いのが事実ですが、

更に読み進んで頂ければご理解頂けると思います。

任意に ε を選んだとき、

$\alpha-\varepsilon<y<\alpha+\varepsilon$, かつ, $a-\delta<x<a+\delta$

で表される領域内に $y=f(x)$が描くグラフの一部が存在するような δ が存在するとき、$x \to a$ のとき $f(x) \to \alpha$ という。



つまり、εを決めたとき上図の網掛け部分の領域内に常に

点$(b, f(b))$($a-\delta<$b$<a+\delta$)が存在すれば収束するといえる。

εを小さくすれば、δも小さくなるのは上図から明らかだが、

もしεをどれだけ小さくしてもδが存在するならば、それを

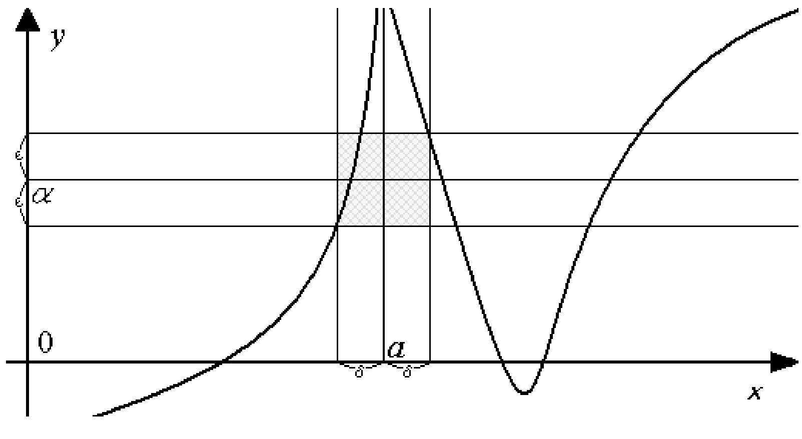
「$x \to a$ のとき$f(x)$はαに収束する」というのである。

逆に、収束しない場合はどうなるかというと、

下図のδをいくら小さくとっても大きくとっても、

網掛け部分の領域内に点$(b, f(b))$($a-\delta<$b$<a+\delta$)が存在し

ない部分があるので、$x \to a$ のとき $f(x)$はαに収束しない。



さて、とりあえず数Ⅲの教科書に載っている定理のひとつでもこの定義を用いて証明してみます。

［定理］ $\lim_{x \to a} f(x)=\alpha,\ \lim_{x \to a} g(x)=\beta$ であるとき、

1. $\lim_{x \to a} \{kf(x)+lg(x)\}=k\alpha+l\beta$
2. $\lim_{x \to a} f(x)g(x)=\alpha\beta$
3. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$　　ただし，$\beta \neq 0$

1.の証明

［証明］ $\lim_{x \to a} f(x)=\alpha,\ \lim_{x \to a} g(x)=\beta$ より，

任意の正の実数 ε について，

$$|x-a| \leqq \delta \quad \Rightarrow |f(x)-\alpha| \leqq \varepsilon,\ |g(x)-\beta| \leqq \varepsilon$$

となるような正の実数 δ が存在する.

よって、任意の正の実数 ε に対して，

$|x-a| \leqq \delta$　であれば，

$$|kf(x)+lg(x)-(k\alpha+l\beta)|=|k(f(x)-\alpha)+l(g(x)-\beta)|$$

$$\leqq |k||f(x)-\alpha|+|l||g(x)-\beta| \leqq (|k|+|l|)\varepsilon$$

となるような正の実数 δ が存在する.

したがって、$\lim_{x \to a} \{kf(x)+lg(x)\}=k\alpha+l\beta$　　［証明終］

2.の証明

［証明］ $\lim_{x \to a} f(x)=\alpha,\ \lim_{x \to a} g(x)=\beta$ より,

任意の正の実数ε について,

$$|x - a| \leqq \delta \quad \Rightarrow |f(x) - \alpha| \leqq \varepsilon,\ |g(x) - \beta| \leqq \varepsilon$$

となるような正の実数δが存在する.

よって、任意の正の実数εに対して,

$|x - a| \leqq \delta$ であれば,

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - \alpha\beta| &= |f(x)g(x) - f(x)\beta + \beta f(x) - \alpha\beta| \\ &= |f(x)(g(x) - \beta) + \beta(f(x) - \alpha)| \\ &\leqq |\beta||f(x) - \alpha| + |f(x)||g(x) - \beta| \leqq (|\beta|+|f(x)|)\varepsilon\end{aligned}$$

ここで, $f(x)$が収束することから, $|x - a| \leqq \delta$ であるとき,

$|f(x)| \leqq \mathrm{M}$ を満たす正の実数 M が存在することから,

$$|f(x)g(x) - \alpha\beta| \leqq (|\beta|+\mathrm{M})\varepsilon$$

したがって、$\lim_{x \to a} f(x)g(x)=\alpha\beta$ ［証明終］

3.の証明

［証明］ $\lim_{x \to a} f(x)=\alpha,\ \lim_{x \to a} g(x)=\beta$ より,

任意の正の実数ε について,

$$|x - a| \leqq \delta \quad \Rightarrow |f(x) - \alpha| \leqq \varepsilon,\ |g(x) - \beta| \leqq \varepsilon$$

となるような正の実数δが存在する.

よって、任意の正の実数εに対して,

$|x - a| \leqq \delta$ であれば,

$$\left|\frac{\alpha}{\beta} - \frac{f(x)}{g(x)}\right| = \left|\frac{\alpha g(x) - f(x)\beta}{\beta g(x)}\right|$$

x が十分 a に近いとき, つねに $|g(x)| \geqq \dfrac{|\beta|}{2}$ であるから,

$$\left|\frac{\alpha}{\beta} - \frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqq \frac{2|\alpha g(x) - f(x)\beta|}{|\beta|}$$

$$\leqq \frac{2(|\alpha||g(x) - \beta| + |\beta||\alpha - f(x)|)}{|\beta|}$$

$$< \frac{2(|\alpha| + |\beta|)}{|\beta|}\varepsilon$$

したがって、$\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$ ［証明終］